

源氏物語 de 数学

～ 源氏香と組合せ～

いんとろだくしょん

源氏物語の各巻にある独特の模様

登場人物の人間関係を意味するとか ...

もう1つの意味は【源氏香】

5種類の香をどのように焚くか

その組合せは、全部で52種類???

香が1種類なら？

香が2種類なら、3種類なら？

この計算はむずかしい...

むずかしい計算ができれば、ちりん・ちりん ...

心の中でベルが鳴る、ちりん・ちりん ...

この難しい組合せは【ベル数】だとか ...

さあ、みんなで【ベル数】にチャレンジ！



第一章 Ⅲ 簡単な問題

【問題 1】 ケーキが 1 個，皿が 1 枚あります．ケーキを皿にのせる方法は何通りありますか？

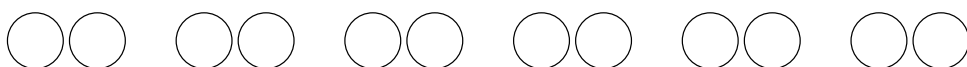
【問題 2】 2 種類のケーキが 1 個ずつ，皿が 2 枚あります．次の各場合にケーキを皿にのせる方法は何通りありますか？

場合 1 皿に区別があって，1 枚の皿にケーキを 1 個ずつのせる

場合 2 皿に区別がなくて，1 枚の皿にケーキを 1 個ずつのせる

場合 3 皿に区別があって，とにかく皿にケーキをのせる

場合 4 皿に区別がなくて，とにかく皿にケーキをのせる



第二章 Ⅲ またまた，簡単な問題？

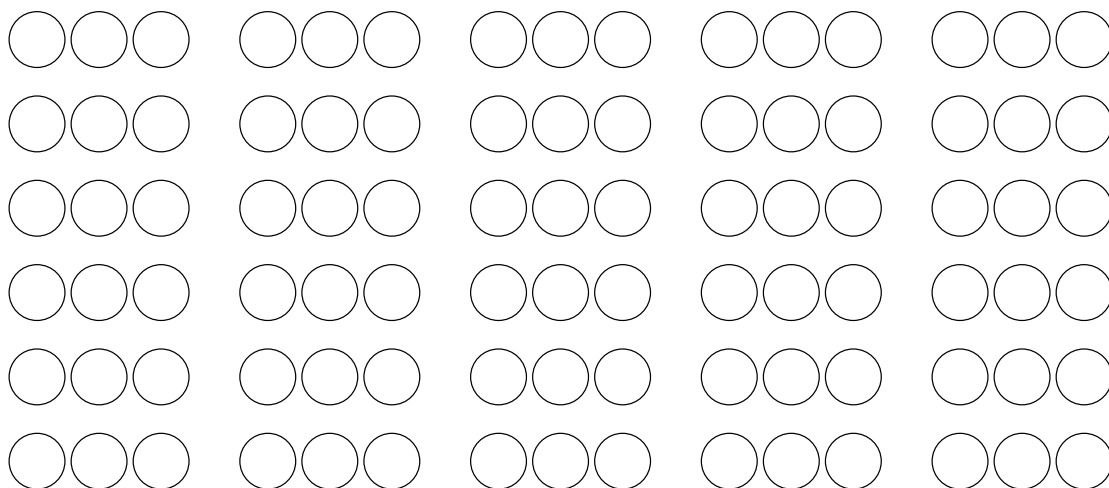
【問題 3】 3 種類のケーキが 1 個ずつ，皿が 3 枚あります．次の各場合にケーキを皿にのせる方法は何通りありますか？

場合 1 皿に区別があって，1 枚の皿にケーキを 1 個ずつのせる

場合 2 皿に区別がなくて，1 枚の皿にケーキを 1 個ずつのせる

場合 3 皿に区別があって，とにかく皿にケーキをのせる

場合 4 皿に区別がなくて，とにかく皿にケーキをのせる



第三章 Ⅲ 推論 , 【 ! 】 【 パワー 】 【 ベル数 】

【問題 4】 4 種類のケーキが 1 個ずつ , 皿が 4 枚あります . 次の各場合にケーキを皿にのせる方法は何通りありますか ?

場合 1 皿に区別があって , 1 枚の皿にケーキを 1 個ずつのせる

場合 2 皿に区別がなくて , 1 枚の皿にケーキを 1 個ずつのせる

場合 3 皿に区別があって , とにかく皿にケーキをのせる

場合 4 皿に区別がなくて , とにかく皿にケーキをのせる

この場合の計算は大変です , 【問題 1】 ~ 【問題 4】 を表に整理しながら , 結果を類推することにしましょう . . .

	場合 1	場合 2	場合 3	場合 4
問題 1				
問題 2				
問題 3				
問題 4				
5 種類				

場合 1 の共通性 / 【 ! 】 階乗と呼ばれます .

場合 2 の共通性 / 単純な組合せ ${}_nC_n$ です .

場合 3 の共通性 / 【 パワー 】 n^n とでもしておきましょうか ?

場合 4 の共通性は分かりませんネ ! これが問題の【ベル数】です !

第四章 皿計算，【ベル数】の構造を探る

【問題 5】5 種類のケーキが 1 個ずつ，皿が 5 枚あります．皿に区別がなくて，とにかく皿にケーキをのせる方法は何通りありますか？

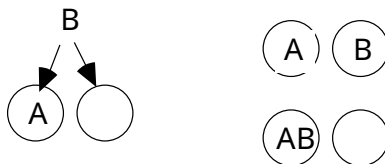
1 種類から 2 種類へ，2 種類から 3 種類へと，構造を探りながら【ベル数】 b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 を順に求めていこう！

♣ Step 1 1 種類から 2 種類へ ♣

1 種類のケーキ《A》にはアプリコットジャムが使っています．1 枚の皿に，1 個のケーキをのせる方法は 1 通りです．すなわち， $b_1 = 1$

1 枚の皿にケーキ《A》がのっています．ここにもう 1 枚の空き皿と，もう 1 種類のケーキ《B》（ベリー系のジャム使用）を追加します．ここでケーキ《B》をとにかく皿にのせるわけです．

ケーキ《B》は，空き皿にのせるか，すでにケーキ《A》のある皿にのせるかのいずれかです．



これは，2 種類のケーキ 1 個ずつを 2 枚の皿に，とにかくのせる方法，つまり b_2 を意味することになります．すなわち， $b_2 = 2$ ここで大切なポイントは，

$$b_2 = \text{空き皿の数} + \text{ケーキのある皿の数}$$

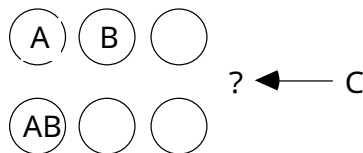
$$\text{空き皿の数} = b_1 \quad \text{ケーキのある皿の数} = b_1$$

で，今後はこの考えを利用して， b_3, b_4, b_5 を順に計算していきます．

♦ Step 2 2 種類から 3 種類へ ♦

2 枚の皿にケーキ《A》と《B》がのっています．ここにもう 1 枚の空き皿と，もう 1 種類のケーキ《C》（チーズ使用）を追加します．ここでケーキ《C》を，とにかく皿にのせるわけです．

ケーキ《C》は，空き皿にのせるか，すでにケーキ《A》や《B》のある皿にのせるかのいずれかです．



これで， b_3 （3 種類のケーキ 1 個ずつを 3 枚の皿に，とにかくのせる方法）が求められます．（空き皿の数を間違えてはいけません！）

$$\text{空き皿の数} = (\quad) \quad \text{ケーキのある皿の数} = (\quad)$$

$$\text{よって，} b_3 = \underline{\hspace{2cm}}$$

♠ Step 3 3種類から4種類へ ♠

3枚の皿にケーキ《A》, 《B》, 《C》がのっています。ここにもう1枚の空き皿と、もう1種類のケーキ《D》(ドライフルーツ使用)を追加します。

またもや、ケーキ《D》を、とにかく皿にのせるわけです。

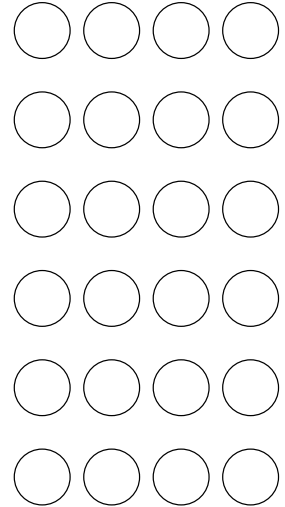
ケーキ《D》は、空き皿にのせるか、ケーキ《A》や《B》や《C》のある皿にのせることになります。

ここで、参考図(Step 2の結果)を自分で書いてみてください。この参考図がないと、空き皿の数とケーキのある皿の数を正確に把握できません。さて、

空き皿の数 = ()

ケーキのある皿の数 = ()

よって、 $b_4 =$ _____



Step 4に入る前に、Step 3までを少し違った視点から分析し直して整理しておく必要があります。

空き皿の数には特別な性質がある

ケーキのある皿の数の変化にも法則がある

♥ Step 4 4種類から5種類へ、そして6種類へ ♥

4枚の皿にケーキ《A》, 《B》, 《C》, 《D》がのっています．ここにもう1枚の空き皿と, もう1種類のケーキ《E》(エッセンスを使用した安物, 予算オーバーです)を追加しました．またまた, ケーキ《E》をのせることにします．

5種類のケーキ1個ずつを5枚の皿にとにかくのせる方法, つまり b_5 をStep 3までのまとめに沿って計算できませんか?

空き皿の数 = ()

ケーキ《A》だけがのがある皿の数 = () Aを消す

ケーキ《B》だけがのがある皿の数 = () Bを消す

ケーキ《C》だけがのがある皿の数 = () Cを消す

ケーキ《D》のがある皿の数 = ()

ケーキのがある皿の数 = ()

よって, $b_5 =$ _____

続いて, b_6 (6種類のケーキ1個ずつを6枚の皿にとにかくのせる方法)を計算します・・・

空き皿の数 = ()

ケーキ《A》だけがのがある皿の数 = () Aを消す

ケーキ《B》だけがのがある皿の数 = () Bを消す

ケーキ《C》だけがのがある皿の数 = () Cを消す

ケーキ《D》だけがのがある皿の数 = () Dを消す

ケーキ《E》のがある皿の数 = ()

ケーキのがある皿の数 = ()

よって, $b_6 =$ _____

解 答 解 説

【問題 1】 ケーキを皿にのせるだけ，答えは 1 通り！

【問題 2】 場合 1 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ A \end{pmatrix}$ の 2 通り！

場合 2 皿に区別がないので，上のものは同じと考えられ，答えは 1 通り！

場合 3 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} AB \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ AB \end{pmatrix}$ の 4 通り！

場合 4 皿に区別がないので， $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} AB \\ \end{pmatrix}$ の 2 通り！

【問題 3】 場合 1 $2 \diamond 3$ の 6 通り！

場合 2 上記の 6 通りのものは同じと考えられ，答えは 1 通り！

場合 3 $3 \diamond 3 \diamond 3$ の 27 通り！

場合 4 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} AB \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$ に C をのせると，次の 5 通り！

$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_C \\ B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B_C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_B \\ C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$

【問題 4】

	場合 1	場合 2	場合 3	場合 4
問題 1	$1! = 1$	${}_1C_1 = 1$	$1^1 = 1$	1
問題 2	$2! = 2$	${}_2C_2 = 1$	$2^2 = 4$	2
問題 3	$3! = 6$	${}_3C_3 = 1$	$3^3 = 27$	5
問題 4	$4! = 24$	${}_4C_4 = 1$	$4^4 = 256$	15
5 種類	$5! =$	${}_5C_5 =$	$5^5 =$	

【ベル数の構造】

$b_1 = 1$ 空き皿の数 = $b_1 = 1$ & ケーキのある皿の数 = 1

$b_2 = 2$ 空き皿の数 = $b_2 = 2$ & ケーキのある皿の数 = $1 + 2 = 3$

$b_3 = 5$ 空き皿の数 = $b_3 = 5$ & ケーキのある皿の数 = $2 + 3 + 5 = 10$

$b_4 = 15$ 空き皿の数 = $b_4 = 15$

& ケーキのある皿の数 = $5 + 7 + 10 + 15 = 37$

$b_5 = 52$

解説 ～ 源氏物語と源氏香

 椎本	 横笛	 野分	 薄雲	 賢木	桐壺
 総角	 鈴虫	 行幸	 朝顔	 花散里	 帚木
 早蕨	 夕霧	 藤袴	 乙女	 須磨	 空蝉
 宿木	 御法	 真木柱	 玉鬘	 明石	 夕顔
 東屋	 幻	 梅枝	 初音	 漣標	 若紫
 浮舟	 勾宮	 藤裏葉	 胡蝶	 蓬生	 未摘花
 蜉蝣	 紅梅	 若菜上	 螢	 閑屋	 紅葉賀
 手習	 竹河	 若菜下	 常夏	 絵合	 花宴
夢浮橋	 橋姫	 柏木	 篝火	 松風	 葵

『源氏物語』は「桐壺」から「夢浮橋」まで全54帖からなっていて、「帚木」から「手習」までの52帖に対しては、それぞれ固有の文様があてはめています。

平安から室町時代の貴族の遊びに 組香 なる遊び（香を焚いてその匂いから香を当てるもので、今日では香道と称するらしい）がありました。その一つが 源氏香 で、次のようルールで楽しむものです。

5種類の香を夫々5包ずつ、計25包準備し、そこから5包を選び出し順に焚く。参加者はその匂いから、順に焚かれた5包の香の関係を文様で答える。例えば、5包全部が違えば「帚木」の文様、5包全部が同じなら「手習」の文様、1包目と2包目が

同じで3～5包目が同じなら「賢木」の文様という具合に．

この文様が考案されたのは室町時代のことで『源氏物語』の各帖の文様とされたのは江戸時代に入ってからというのが通説です．幾何学模様としても美しく，「初音」「花散里」は家紋としても用いられています．

解 説 ～ 源 氏 香 文 と ベ ル 数

はじめ，ベル数を 5種類のケーキを5枚の皿にとにかくのせる方法 として考えました．これと 5包の香の関係の文様 とどのように対応するのか？

ケーキは香の包に対応し，皿は香そのものに対応すると考えます．つまり，源氏香文の縦棒を右から順に，ケーキ《A》・ケーキ《B》・ケーキ《C》・ケーキ《D》・ケーキ《E》とし，横棒で繋がったものが同じ皿にのっていると解釈するわけです．

例えば，「若菜上」の文様は（《A》・《D》・《E》）（《B》・《C》）のように皿にのり，「若菜下」の文様は（《A》・《B》）（《C》・《E》）（《D》）のように皿にのっていると解釈できます．

第五章 Ⅲ 結論，【ベル数】の簡単計算法

ベル数の構造がわかれば，次々に計算するアルゴリズムができ上がります．

下の表はそのアルゴリズムです， b_6 からあとも計算できますか？

	1					
b_1	1	2				
b_2	2	3	5			
b_3	5	7	10	15		
b_4	15	20	27	37	52	
b_5	52					
b_6						
b_7						

ベル数の一般式を計算しようと思う方はぜひチャレンジして下さい！

『源氏物語 de 数学』これにておしまい

国語とクロス 源氏物語 d e 数学

林望氏は慶應義塾高校の非常勤講師時代に「源氏物語」朗読の授業を行ったとか、教科書的部分だけでなく性描写もかまわず読んだそうです。

数楽者マーチン・ガードナーはいろいろなネタを提供してくれます。源氏香とやらが数学と関係あるそうな

そこで、サマセミに国語教師と実験的授業を開講 連続講座の午前は99.9%が国語、午後は99.99%が数学というクロスオーバー（羊頭狗肉もいいところ）参加者は少ないながらバラエティーに富んでいました。

午前の講座のアシスタントをして、林望氏が源氏にこだわる理由が分かるような気がします。午後の講座は小四・中一・高校生・おじさん・頭のサビツイたおばさん（自称）と多種多様の参加者20名余、こういった方達に ベル数を理解していただくのは無謀という他ありません。

ところが、数え上げることから始める授業には落伍者が出てきません。簡単な分かること を扱っていたはずなのに、突然 超ムズカシイ問題 に変身しています。それでも、数式で処理しないからみんな考えるわけです。

数学は好きだという中一の女子生徒は「途中からすごく難しくなった、難しいことなのに自分で考えられて楽しかった」という感想を残してくれました。

たおばさんも最後までニコニコ授業に参加して、まだ大丈夫という顔で教室を去っていきました。

次は 呑んべ - 仲間 のおじさんたち相手に、 源氏香風利き酒 でもやりながら、この授業を再現しようかなどとも考えています。その場合、《ケーキと皿》を《酒の銘柄とぐい呑み》に変えて教材を作り直さねば